72. 正田氏の一定理について

(東京工大)　遠山　啓

正田教授は任意の代数的閉体においては *unimodular* な行列Aが適当な二つの行列B&Cの交換子として表はせる事を証明された。(時報 13 (1937) 361–365)

$$A = BCB^{-1}C^{-1}$$

この定理が周知の compact な Lie群 — *unitary unimodular* $SU(n)$, *unitary symplectic* $USp(2n)$, *proper orthogonal* $O^{+}(n)$ について成立するかどうかを調べて見たい、結果は Abel的な $O^{+}(2)$ を除いてすべて成立する事が分った。主なる方法は対角線型に変換する事である。

(i) $SU(n)$

$SU(n)$に属するAはすべて適の或る要素Fによつて対角線型に直る.

$$F^{-1}AF=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

従つてAを始めからこの形と考へても一般性を失はない。

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}\quad (|a_1|=|a_2|=\cdots=|a_n|=1,\ a_1a_2\cdots a_n=1)$$

$$C=\begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix}\quad c_i=a_1a_2\cdots a_{i-1}\quad (i=1,2\cdots\cdots n)$$

$$AC=\begin{pmatrix} c_2 & & & & & \\ & c_3 & & & & \\ & & c_4 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & c_n & \\ & & & & & c_1 \end{pmatrix}$$

こゝで

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ \vdots & & 0 & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}\quad と置けば.$$

$$AC=BCB^{-1}$$

従つて $\qquad A=BCB^{-1}C^{-1}$

こゝでBCは共に *unitary* であるが $|B|^{-\frac{1}{n}}$, $|C|^{-\frac{1}{n}}$ を乗ずれば *unimodular* になる。

(盛山. 学士院記事 21 (1944) 554–557 又は *Ueber eine nicht-Abelsche Theorie der Algebraischen Funktionen* §7. 近刊))

(ii) $USp(2n)$

この場合には対角線変換が出来る. (Weyl, Classical groups 217)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_1^{-1} & & & & \\ & & \lambda_2 & & & \\ & & & \lambda_2^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \\ & & & & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

このとき $\begin{pmatrix} \lambda_i & \\ & \lambda_i^{-1} \end{pmatrix}$ が交換子で表はされればよい。之は $USp(2)$ に属し $USp(2)$ は $SU(2)$ と同型であるから (*Pontrjagin. Topological groups* 276) 既

に(i)で証明されてゐたわけである。

(iii) $O^+(n)$.

準備として　$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$　$Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ と書けば、

$R(\theta)=QR(-\theta)Q^{-1}$ が成立する。

まづ $n=4$ の場合は

$$\begin{pmatrix}R(\theta_1) & \\ & R(\theta_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R(\frac{\theta_1}{2}) & \\ & R(\frac{\theta_2}{2})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q & \\ & Q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R(-\frac{\theta_1}{2}) & \\ & R(-\frac{\theta_2}{2})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q^{-1} & \\ & Q^{-1}\end{pmatrix}$$

又対角線上の $R(\theta_i)$ を二つづつ組合せると $n\equiv 0 \pmod 4$ の場合は全部成立する。　$n\equiv 1 \pmod 4$ のときは容易に分る。

$n=3$ のときは

$$\begin{pmatrix}R(\theta) & \\ & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R(\frac{\theta}{2}) & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q & \\ & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R(-\frac{\theta}{2}) & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q & \\ & -1\end{pmatrix}$$

$n\equiv 3 \pmod 4$ も容易に分る。

$n\equiv 2 \pmod 4$ の場合は $n=2$ では成立しないから　$n=6$ から始めねばならぬ

$$\begin{pmatrix}R(\theta_1) & & \\ & R(\theta_2) & \\ & & R(\theta_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}) & & \\ & R(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}) & \\ & & R(\frac{\theta_3}{2})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & E_2 & 0\\ E_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & Q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R(-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}) & & \\ & R(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}) & \\ & & R(\frac{\theta_3}{2})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & E_2 & 0\\ E_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & Q\end{pmatrix}$$

即ち次の定理が得られた。

$\boxed{\text{定理}}$　$SU(n)$, $USp(n)$, $O^+(n)$（但し $O^+(2)$ を除く）の任意の要素は他の二つの要素の交換子として表はせる。

(1947. 11. 7)